Разнобой по комбе

1. На шахматной доске отметили 16 клеток, причём в каждом столбце и в каждой строке по две отмеченные. Докажите, что в отмеченные клетки можно поставить 8 белых и 8 чёрных ладей так, чтобы в каждой строке и каждой строке стояло по одной белой и одной чёрной ладье.

2. Левша и невидимая блоха на плоскости играют, ходя по очереди. Очередным ходом Левша проводит прямую, а блоха совершает прыжок длины 1, не пересекающий ни одной прямой. Если таких прыжков нет, блоха проигрывает. Может ли Левша выиграть, как бы не играла блоха?

3. Сто одинаковых с виду монет разложены поровну на чаши весов так, что весы не в равновесии. Известно, что есть монеты ровно двух весов, причём монет каждого веса — чётное число. За одну операцию разрешается поменять местами любые две монеты. За какое наименьшее число операций можно наверняка добиться равновесия?

4. В классе 30 школьников. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурили двое. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

5. Какое наибольшее число коней, каждый из которых бьет ровно одного другого, можно расставить на доске 8×8?

6. Круг разделен на 2n секторов, n синих и n красных. В красные по часовой стрелке вписаны числа от 1 до n, в синие — против часовой. Докажите, что найдется полукруг с числами от 1 до n.

7. Докажите, что из множества 108 различных трёхзначных чисел можно выбрать четыре попарно непересекающихся подмножества, суммы чисел в которых равны.

8. Фигуру площади 1, вырезанную из бумаги, разделили на десять областей и покрасили их в десять различных цветов. Затем фигуру перевернули и на обратной стороне разделили её на десять областей каким-то другим способом. Докажите, что новые области можно покрасить в десять различных цветов так, чтобы сумма площадей кусков, раскрашенных с обеих сторон одинаковым цветом, была не меньше 0.1.

9. В дереве 100 висячих вершин. Докажите, что можно добавить в дерево 50 рёбер так, чтобы при удалении любого ребра из получившегося графа он оставался связным.

[2101]

[*2019–2020*] группа: Убегающие *9 сентября 2019 г.*

Разнобой по комбе

1. На шахматной доске отметили 16 клеток, причём в каждом столбце и в каждой строке по две отмеченные. Докажите, что в отмеченные клетки можно поставить 8 белых и 8 чёрных ладей так, чтобы в каждой строке и каждой строке стояло по одной белой и одной чёрной ладье.

2. Левша и невидимая блоха на плоскости играют, ходя по очереди. Очередным ходом Левша проводит прямую, а блоха совершает прыжок длины 1, не пересекающий ни одной прямой. Если таких прыжков нет, блоха проигрывает. Может ли Левша выиграть, как бы не играла блоха?

3. Сто одинаковых с виду монет разложены поровну на чаши весов так, что весы не в равновесии. Известно, что есть монеты ровно двух весов, причём монет каждого веса — чётное число. За одну операцию разрешается поменять местами любые две монеты. За какое наименьшее число операций можно наверняка добиться равновесия?

4. В классе 30 школьников. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурили двое. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

5. Какое наибольшее число коней, каждый из которых бьет ровно одного другого, можно расставить на доске 8×8?

6. Круг разделен на 2n секторов, n синих и n красных. В красные по часовой стрелке вписаны числа от 1 до n, в синие — против часовой. Докажите, что найдется полукруг с числами от 1 до n.

7. Докажите, что из множества 108 различных трёхзначных чисел можно выбрать четыре попарно непересекающихся подмножества, суммы чисел в которых равны.

8. Фигуру площади 1, вырезанную из бумаги, разделили на десять областей и покрасили их в десять различных цветов. Затем фигуру перевернули и на обратной стороне разделили её на десять областей каким-то другим способом. Докажите, что новые области можно покрасить в десять различных цветов так, чтобы сумма площадей кусков, раскрашенных с обеих сторон одинаковым цветом, была не меньше 0.1.

9. В дереве 100 висячих вершин. Докажите, что можно добавить в дерево 50 рёбер так, чтобы при удалении любого ребра из получившегося графа он оставался связным.