

## Разнобой из ЕГЭ

1) В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AM$ . Прямая, проходящая через вершину  $B$  перпендикулярно  $AM$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $N$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 9$ .

а). Докажите, что биссектриса угла  $C$  делит отрезок  $MN$  пополам

б). Пусть  $P$  – точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ . Найдите отношение  $AP : PN$

2) Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и линии их центров.

а). Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б). Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

3) Диагональ  $AC$  прямоугольника  $ABCD$  с центром  $O$  образует со стороной  $AB$  угол  $30^\circ$ . Точка  $E$  лежит вне прямоугольника, причем  $\angle BEC = 120^\circ$ .

а). Докажите, что  $\angle CBE = \angle COE$

б). Прямая  $OE$  пересекает сторону  $AD$  прямоугольника в точке  $K$ . Найдите  $EK$ , если известно, что  $BE = 40$  и  $CE = 24$ .

4) В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AP$  и  $CQ$ .

а). Докажите, что угол  $PAC$  равен углу  $PQC$ .

б). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если  $PQ = 8$  и  $\angle ABC = 60^\circ$ .

5) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  известны стороны  $AC = 12$ ,  $BC = 5$ . Окружность радиуса  $\frac{1}{2}$  с центром  $O$  на стороне  $BC$  проходит через вершину  $C$ . Вторая окружность касается катета  $AC$ , гипотенузы треугольника и внешним образом касается первой окружности.

а). Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем  $\frac{1}{5}$  длины катета  $AC$ .

б). Найдите радиус второй окружности.

6) Радиусы окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  равны соответственно 1 и 3. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой  $O_1O_2$ , если  $O_1O_2 = 14$ .

7) В окружности проведены хорды  $PQ$  и  $CD$ , причем  $PQ = PD = CD = 10$  и  $CQ = 6$ . Найдите  $CP$ .

8) В треугольнике  $ABC$   $AB = 13$ ,  $BC = 10$ ,  $CA = 7$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  так, что  $BD : DC = 1 : 4$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$ , касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину  $EF$ .

9) В параллелограмм вписана окружность

а). Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б). Окружность, касающаяся стороны ромба, делит ее на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со стороной ромба.