

## §14. Простейшие приемы интегрирования

### Таблица основных интегралов

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$                                | 9) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$                                       |
| 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C;$  | 10) $\int \cos x dx = \sin x + C;$                                       |
| 3) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$    | 11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$                |
| 4) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C;$ | 12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$              |
| 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 + a^2} \right  + C;$  | 13) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$             |
| 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C;$        | 14) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$             |
| 7) $\int a^x dx = a^x \ln a + C;$   | 15) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$   |
| 8) $\int e^x dx = e^x + C;$   | 16) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$ |

Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , и  $u = \varphi(x)$ , то  $\int f(u) du = F(u) + C$ .

Если  $u(x)$  и  $v(x)$  – дифференцируемые функции, то  $\int u dv = uv - \int v du$ .

Если  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  – непрерывно дифференцируемая функция, то  $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ .

14.1. Путем преобразования подынтегрального выражения найти следующие интегралы:

- |                                   |                                     |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\int (2 - 3\sqrt{x})^2 dx;$   | 2) $\int (x+1)^{15} dx;$            |
| 3) $\int \frac{dx}{2x-1};$        | 4) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5};$      |
| 5) $\int \frac{x dx}{4+x^4};$     | 6) $\int \frac{x^3 dx}{x^4-2};$     |
| 7) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2};$ | 8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}};$ |

- 9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$ ;
- 10)  $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$ ;
- 11)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ ;
- 12)  $\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$ ;
- 13)  $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$ ;
- 14)  $\int \sqrt{8-2x} dx$ ;
- 15)  $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ ;
- 16)  $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ ;
- 17)  $\int (e^x+1)^3 dx$ ;
- 18)  $\int e^{-3x+1} dx$ ;
- 19)  $\int xe^{-x^2} dx$ ;
- 20)  $\int x^2e^{-x^3} dx$ ;
- 21)  $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$ ;
- 22)  $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^x}$ ;
- 23)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ ;
- 24)  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ ;
- 25)  $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ ;
- 26)  $\int \frac{dx}{9+2x^2}$ ;
- 27)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ ;
- 28)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^4}}$ ;
- 29)  $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;
- 30)  $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ ;
- 31)  $\int \operatorname{tg} x dx$ ;
- 32)  $\int \operatorname{ctg} x dx$ ;
- 33)  $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$ ;
- 34)  $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$ ;
- 35)  $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$ ;
- 36)  $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ ;
- 37)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ ;
- 38)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ ;
- 39)  $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$ ;
- 40)  $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$ ;
- 41)  $\int \cos 2x dx$ ;
- 42)  $\int \cos^2 x dx$ ;
- 43)  $\int \sin^2 x dx$ ;
- 44)  $\int \cos x \sin 3x dx$ ;
- 45)  $\int \cos 2x \cos 3x dx$ ;
- 46)  $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$ ;

47)  $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$ ;

48)  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$ ;

49)  $\int \cos^3 x dx$ ;

50)  $\int \operatorname{tg}^4 x dx$ .

14.2. Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

1)  $\int \ln x dx$ ;

2)  $\int x^4 \ln x dx$ ;

3)  $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$ ;

4)  $\int x e^{-x} dx$ ;

5)  $\int x^2 e^{-2x} dx$ ;

6)  $\int x \cos x dx$ ;

7)  $\int x^2 \sin 2x dx$ ;

8)  $\int x \operatorname{ch} x dx$ ;

9)  $\int \operatorname{arctg} x dx$ ;

10)  $\int \arcsin x dx$ ;

11)  $\int x^2 \arccos x dx$ ;

12)  $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ ;

13)  $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$ ;

14)  $\int \sin(\ln x) dx$ ;

15)  $\int \sqrt{a^2 - x^3} dx$ ;

16)  $\int \sqrt{x^2 + a} dx$ ;

17)  $\int \frac{x^3}{(1 + x^2)^2} dx$ ;

18)  $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$ ;

19)  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ ;

20)  $\int \frac{x e^x}{(x + 1)^2} dx$ .

14.3. Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

1)  $\int \sin^4 x dx$ ;

2)  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ ;

3)  $\int \cos^6 x dx$ ;

4)  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ ;

5)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$ ;

6)  $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$ ;

8)  $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ ;

9)  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ ;

10)  $\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx$ ;

11)  $\int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx$ ;

12)  $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ;

13)  $\int 5^{\sqrt{x}} dx$ ;

14)  $\int x \cos \sqrt{x} dx$ ;

15)  $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ ;

16)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}}$ .