Арифметика многочленов одной переменной
Уроки алгебры у 7"М"класса

Пособие составлено учителем школы 2101
Барышевым И.Н.

Москва 2019

Произведение многочленов

Определение 1

Одночленом мы будем называть произведение действительного числа и некоторой степени переменной (чаще всего мы будем использовать переменную x, но не всегда).

Примеры.

1) $-18x^5$
2) $\frac{1}{2}x^2$
3) $-\frac{13}{12}x^4$

Определение 2

Степенью одночлена называется показатель степени переменной.

Коэффициентом одночлена называется число, стоящее перед степенью переменной.

В примерах приведенных выше степени многочлена равны соответственно 5, 2, 4.

Сложение и вычитание одночленов

Складывать одночлены можно только, если показатели в степени переменной одинаковые!

Для того, чтобы сложить два одночлена необходимо сложить их коэффициенты, а показатель степени переменной оставить неизменнным.

Для того, чтобы вычесть два одночлена необходимо произвести вычитание с их коэффициентами, а показатель степени переменной оставить неизменным.

Примеры.

1) $3x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{7}{2}x^2$
2) $5x^5 - 0,4x^5 = 4,6x^5$

Задание 1

Выполните сложение:

1) $3x^2 + x^2 - 2x^2 =$
2) $x^3 - 0,1x^3 + 0,2x^3 =$
3) $x^7 - 12x^7 + 13x^7 =$
4) $\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}x + \frac{10}{7}x =$
5) $\frac{4}{3}x^9 - \frac{1}{2}x^9 - x^9 =$

Произведение одночленов

Для того, чтобы перемножить два одночлена, необходимо: перемножить цоэффициенты и перемножить переменные в нужных степенях (не забывайте, что при произведении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются).

Примеры.

1) $3x^2 \cdot 12x^5 = 3 \cdot 12 \cdot x^2 \cdot x^5 = 36x^{(2+5)} = 36x^7$
2) $\frac{7}{12}x^3 \cdot \frac{24}{21}x^{11} = \frac{7}{12} \cdot \frac{24}{21}x^{14} = \frac{7 \cdot 24}{12 \cdot 21}x^{14} = \frac{2}{3}x^{14}$

Задание 2

Найдите произведение следующих одночленов:

1) $2x^2 \cdot \frac{6}{4}x^4$

2) $\frac{21}{5}x^{18} \cdot \frac{15}{7}x^3$

3) $\frac{-4}{3}x^7 \cdot \frac{30}{8}x^4$

4) $\frac{1}{2}x^3 \cdot 2x^{12}$

5) $\frac{5}{6}x \cdot 15x^3$

6) $261x^2 \cdot 2101x^8$

Деление одночлена на одночлен

Для того, чтобы разделить один одночлен на другой, неоходимо: разделить коэффициент первого одночлена на коэффициент второго, а показатели степеней вычесть (произвести деление степеней переменной).

Пример.

1) $12x^7 : 3x^2 = \frac{12}{3}x^{7-2} = 4x^5$

Задание 3

Найти результат деления одночлена на одночлен:

1) $12x^{2011} : 3x^3 =$

2) $\frac{3}{2}x^{19} : \frac{6}{7}x^{12} =$

3) $0,25x^8 : 0,005x^4 =$

4) $15x^{23} : 5x^{18} =$

5) $12x^{2101} : \frac{1}{2}x^{261}$

6) $\frac{3}{4}x^{23} : \frac{1}{2}x^3$

Многочлен от одной переменной

Многочленом (одной переменной) называется сумма одночленов с одинаковой переменной.

Про многочлен $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ будем говорить, что он представлен в стандартном виде.

Степенью многочлена называется наибольший показатель степеней одночленов, входящих в многочлен с ненулевыми коэффициентами. Обозначение степени многочлена:

$deg(P_n(x)) = n$ - степень многочлена равняется n.

Произведением двух многочленов называется многочлен, который получается при раскрытии скобок по дистрибутивному закону умножения и приведению подобных слагаемых (подобными слагаемыми считаются одночлены с одинаковыми показателями степени переменной).

Пример.

1) $(x^3-2x^2+x-1)\cdot(x^2-2x+1) = x^5-2x^4+x^3-2x^4+4x^3-2x^2+x^3-2x^2+x-x^2+2x-1 = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

Задача

Докажите, что при произведении многочленов их степени складываются.

Задание 4

1. Выполните умножение следующих многочленов:

1) $(1-2x^3+x^5)\cdot(2-x+x^2)$

2) $(1-x^2)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8)\cdot(1+x^{16})$

3) $(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5)\cdot(x+1)$

4) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)\cdot(1-x)$

5) $(1-2x)(1+2x+4x^2)$

6) $(2-x+x^2)\cdot(x^3-x^2+x-2)$

2. Приведите многочлен к стандартному виду, то есть раскройте все скобки и приведите подобные слагаемые:

1) $4x\cdot\frac{1}{2}x^3-3,5x^2\cdot 6+\frac{1}{5}x^2\cdot 3x^3-x^2\cdot(-2x)+2(-1,5)$

2) $(5x-2)(5x+2)-(5x-4)^2-40x$

Деление многочленов

Перед тем, как мы займемся делением многочленов, давайте вспомним, как мы делим числа.

Разделите число 141354 на 5984.

Для того, чтобы разделить один многочлен на другой в столбик необходимо:

1) разделить старший одночлен на старший и записать под чертой деления результат;

2) умножить последний полученный одночлен в неполном частном на делимое и записать под делителем;

3) вычесть из делителя (или уже из того, что от него осталось) полученное произведение;

4) повторять процесс до того момента, пока старшая степень остатка делится на старшую степень делителя;

5) выписать неполное частное и остаток - результат деления.

Пример

1) Разделим многочлен $3x^5 + 2x^4 + x^2 - x + 1$ на многочлен $x^3 + 2x^2 + x$ Заметим, что в делимом нет коэффициента при x^3, поэтому для удобства мы напишем перед ним нулевой коэффициент (для удобства при снесении слагаемых).

$$
\begin{array}{r|l}
{}_{-}3x^5 + 2x^4 + 0 * x^3 + x^2 - x + 1 & \underline{x^3 + 2x^2 + x} \\
\underline{3x^5 + 6x^4 + 3x^3 \qquad\qquad\qquad} & 3x^2 - 4x + 5 \\
{}_{-} - 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1 & \\
\underline{-4x^4 - 8x^3 - 4x^2 \qquad\quad} & \\
{}_{-}5x^3 + 5x^2 - x + 1 & \\
\underline{5x^3 + 10x^2 + 5x \quad} & \\
-5x^2 - 6x + 1 &
\end{array}
$$

Далее действуем по алгоритму:

1.1) Делим $3x^5$ на x^3, получается $3x^2$, записываем это в неполном частном и умножаем назад на делитель;

2.1) Запимываем снизу результат от умножения: $3x^5 + 6x^4 + 3x^3$.

3.1) Вычитаем из делимого результат умножения: $-4x^4 - 3x^3$

Обращаем Ваше внимание на коэффициент перед x^3: $0 \cdot x^3 - 3x^3 = -3x^3$. В этом месте чаще всего допускают ошибку, будьте всегда внимательны при вычитании чисел!

4.1) Сносим $x^2 - x + 1$ и повторяем процесс для выражения $-4x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$.

Здесь отметим, что сносить можно не весь многочлен до конца, а только следующую степень (это зависит от Вашего выбора, сносить целиком многочлен просто удобнее).

1.2) Делим $-4x^4$ на x^3, получается $-4x$, записываем его в неполное частное и умножаем назад на делитель;

2.2) Записываем снизу под выражением, полученным после шага 4.1 результат умножения: $-4x^4 - 8x^3 - 4x^2$

3.2) Вычитаем из одного другое: $5x^3 + 5x^2$;

4.2) Сносим $-x + 1$ и повторяем процесс для выражения $5x^3 + 5x^2 - x + 1$

1.3) Делим $5x^3$ на x^3, получается 5, записываем в неполное частное и назад умножаем на делитель;

2.3) Записываем снизу результат от умножения $5x^3 + 10x^2 + 5x$;

3.3) Вычитаем из выражения, полученного в 4.2 результат умножения, получаем: $-5x^2 - 6x + 1$

5.1) Заметим, что в 3.3 мы получили многочлен, который уже нельзя разделить на делитель (его степень меньше степени делителя), поэтому это остаток, тогда мы можем переписать наше деление следующим образом:

$3x^5 + 2x^4 + x^2 - x + 1 = (x^3 + 2x^2 + x)(3x^2 - 4x + 5) + (-5x^2 - 6x + 1)$

Задание 5

1. Выполните деление многочленов:

1) $(15x^5 - 45x^4 + 29x^3 + 7x - 6) : (x^2 - 3x + 2)$

2) $(x^{10} - 14x^9 + 13x^8 + x^7 - x^6 + 3x^5 - 51x^4 + 158x^3 - 23x^2 - 12x + 2) : (x^3 - 13x^2 + 1)$

3) $(x^7 - x^5 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1) : (x^2 - 1)$

4) $(x^7 + x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 5x^3 + x^2 - x - 1) : (x^2 + x + 1)$

5) $(27x^3 - 1) : (9x^2 + 3x + 1)$

6) $(2x^3 - 13x^2 + 17x - 3) : (2x - 3)$

7) $(x^7 - 3x^6 + x^5 - 10x^4 + 11x^3 + 7x^2 + 15x - 14) : (x^3 - x - 2)$

8) $(6x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 100x^2 - 60x + 7) : (3x^2 - 7x + 1)$

9) $(x^8 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 1) : (x^2 + 3x - 1)$

2. Найдите значение параметра , при котором многочлен $3x^5 - 9x^4 + 10x^3 + 7x^2 - 11x + a$ делится на $x^2 - 3x + 4$

НОД и алгоритм Евклида

Определение 3

Наибольшим общим делителем двух натуральных чисел a и b называется наибольшее натуральное число, на которое делится и a и b.

$(a, b) = r$ - обозначение наибольшего общего делителя двух чисел.

Корни многочленов

Определение 5

Корнем многочлена называется такое число a, что, при подстановке его вместо переменной, значение многочлена равно нулю.

Иными словами, если a-корень многочлена $P(x)$, то $P(a) = 0$.

Теорема о рациональных корнях многочлена

Если коэффициента многочлена – целые числа и рациональное число $\frac{m}{n}$ является корнем многочлена, то обязательно m – делитель свободного члена, n – делитель коэффициента при старшей степени.

Доказательство

○ Пусть многочлен $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где все $a_i \in \mathbb{Z}$.

Пусть $x = \frac{m}{n}$ - корень многочлена $P(x)$, тогда подставим его вместо x:

$P(\frac{m}{n}) = a_k(\frac{m}{n})^k + a_{k-1}(\frac{m}{n})^{k-1} + \ldots + a_1 \frac{m}{n} + a_0 = \frac{a_k m^k + a_{k-1} m^{k-1} n + \ldots a_1 m n^{k-1} + a_0 n^k}{n^k} = 0.$

Отметим, что дробь равна нулю, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель нет:

$a_k m^k + a_{k-1} m^{k-1} n + \ldots a_1 m n^{k-1} + a_0 n^k = 0$

1) Заметим, что все слагаемые, кроме первого, делятся на n, значит и первое слагаемое делится на n (если бы первое слагаемое не делилось на n, то все выражение бы не делилось на n, а справа стоит 0, который делится на любое число).

m и n - взаимно простые (в противном случае мы бы просто сократили дробь в самом начале), значит из того, что $a_k m^k$ делится нацело на n, следует, что a_k делится нацело на n.

2) Аналогично заметим, что все слагаемые, кроме последнего делятся на m, значит и последнее делится на m.

m и n - взаимно простые (в противном случае мы бы просто сократили дробь в самом начале), значит из того, что $a_0 n^k$ делится нацело на m, следует, что a_0 делится нацело на m, что и требовалось доказать. ●

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x - a)$ есть $P(a)$

○ Разделим $P(x)$ на $(x - a)$ с остатком: $P(x) = (x - a)S(x) + R(x)$. Заметим, что остаток должен быть многочленом, у которого степень меньше степени делителя, то есть меньше 1, значит, $degR(x) = 0$; иными словами остаток является просто числом.

Найдем это число. Выражение $P(x) = (x-a)S(x) + R(x)$ является верным для любого x, а значит верно и для $x = a$, подставим: $P(a) = (a-a)S(a) + R(a)$, то есть $P(a) = R(a)$, но, так как мы только что показали, $R(x)$ - это просто число, не зависящее от x, то остаток от деления $P(x)$ на $(x-a)$ равен $P(a)$, что и требовалось доказать. ●

Следствие из теоремы Безу

Если число a является корнем многочлена $P(x)$, то данный многочлен делится нацело на $(x-a)$

○ Если a -корень, то $P(a) = 0$, а остаток от деления $P(x)$ на $(x-a)$ есть $P(a) = 0$. Раз остаток равен 0, то многочлен $P(x)$ делится нацело $(x-a)$, что и требовалось доказать. ●

Решите уравнения:

1) $x^3 - 3x + 2 = 0$
2) $2x^5 - 3x^4 - 10x^3 + 15x^2 + 12x - 18 = 0$
3) $x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 9x + 30 = 0$
4) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
5) $2x^4 - 10x^3 - x^2 + 15x - 3 = 0$
6) $21x^4 - 13x^3 + 23x^2 - 13x + 2 = 0$