

ВЫСОТЫ

0. В параллелограмме $ABCD$ проведены перпендикуляр в точке A к стороне AB и перпендикуляр в точке C к BC , которые пересеклись в точке K . Докажите, что $KD \perp AC$.

1. Известно, что высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины, делят угол на 4 равны части. Найдите углы треугольника.

2. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB и отличны от A и B . Прямые AC и BD пересекаются в точке P , а прямые AD и BC — в точке Q . Докажите, что AB перпендикулярно PQ .

3. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K , а на стороне BC — точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P . Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.

4. Пусть O_a , O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников PBC , PCA и PAB . Докажите, что если точки O_a и O_b лежат на прямых PA и PB , то точка O_c лежит на прямой PC .

5. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB , проходящую через точки A_1 и B_1 , в точке D . Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M , BD и AA_1 — в точке N . Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

6. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

7. Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC .

8. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC , и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD , пересекаются в точке P . Докажите, что $PA = PD$.